Mathematische Objekte: Funktionen

Begriffe, Bezeichnungen und Darstellungsformen

Mathematische Objekte: Zahlen

Inhalt

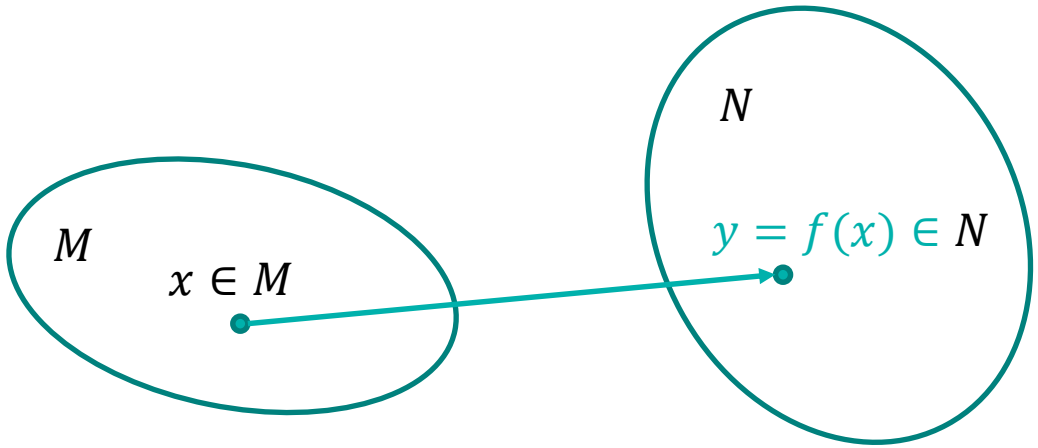
Übersicht:

- Funktionen
  - Begriffe und Bezeichnungen
    - Definitionsbereich, Bildbereich, Wertebereich…
  - Darstellungsformen
    - Term, Tabelle, graphische Darstellung…

Mathematische Objekte: Funktionen

Begriffe und Bezeichnungen

Wir betrachten eine Funktion…



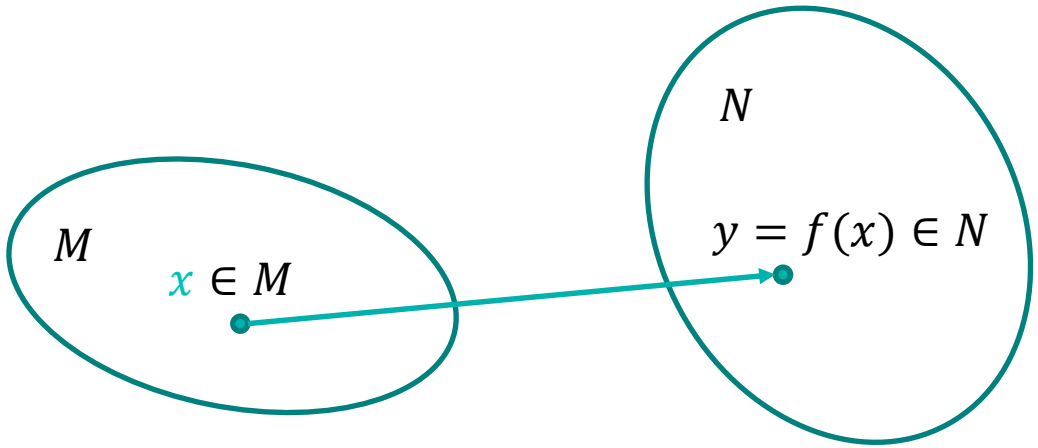
Bezeichnung:

y ist das Bild oder der Wert von x unter der Abbildung f

Mathematische Objekte: Funktionen

Begriffe und Bezeichnungen

Wir betrachten eine Funktion…



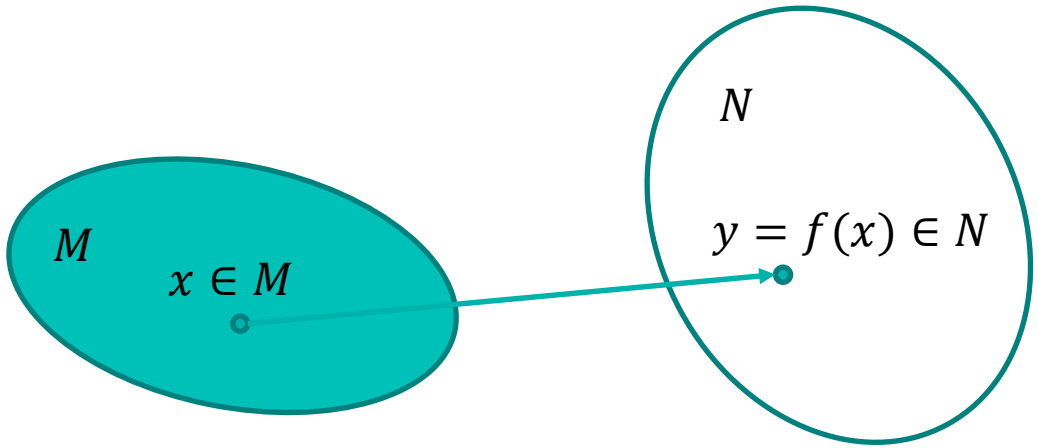
Bezeichnung:

x ist das Argument oder des Urbild von $f(x)$

Mathematische Objekte: Funktionen

Begriffe und Bezeichnungen

Wir betrachten eine Funktion…



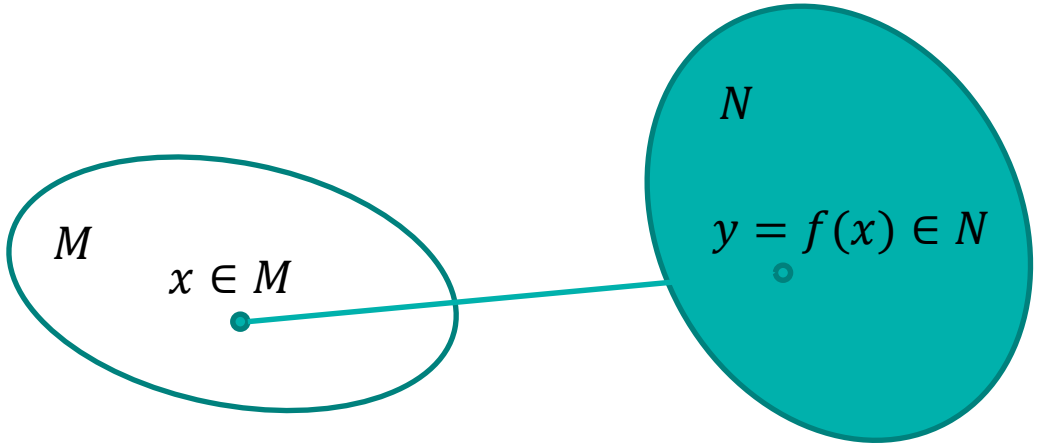
Bezeichnung:

M ist der Definitionsbereich oder der Urbildraum

Mathematische Objekte: Funktionen

Begriffe und Bezeichnungen

Wir betrachten eine Funktion…



Bezeichnung:

N ist der Bildbereich (zu unterscheiden von der Wertemenge)

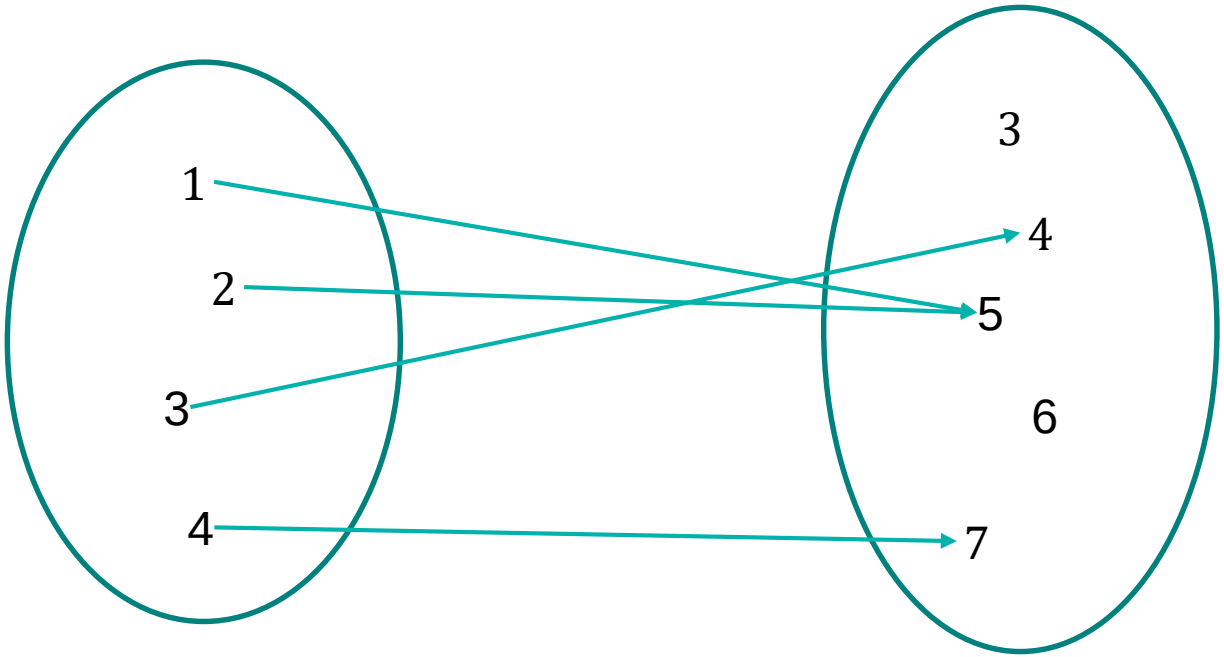
Mathematische Objekte: Funktionen

Begriffe und Bezeichnungen

Beispiele...

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$f(1) = 5\,,\ f(2) = 5\,,\ f(3) = 4 \quad \text{und} \quad f(4) = 7$$



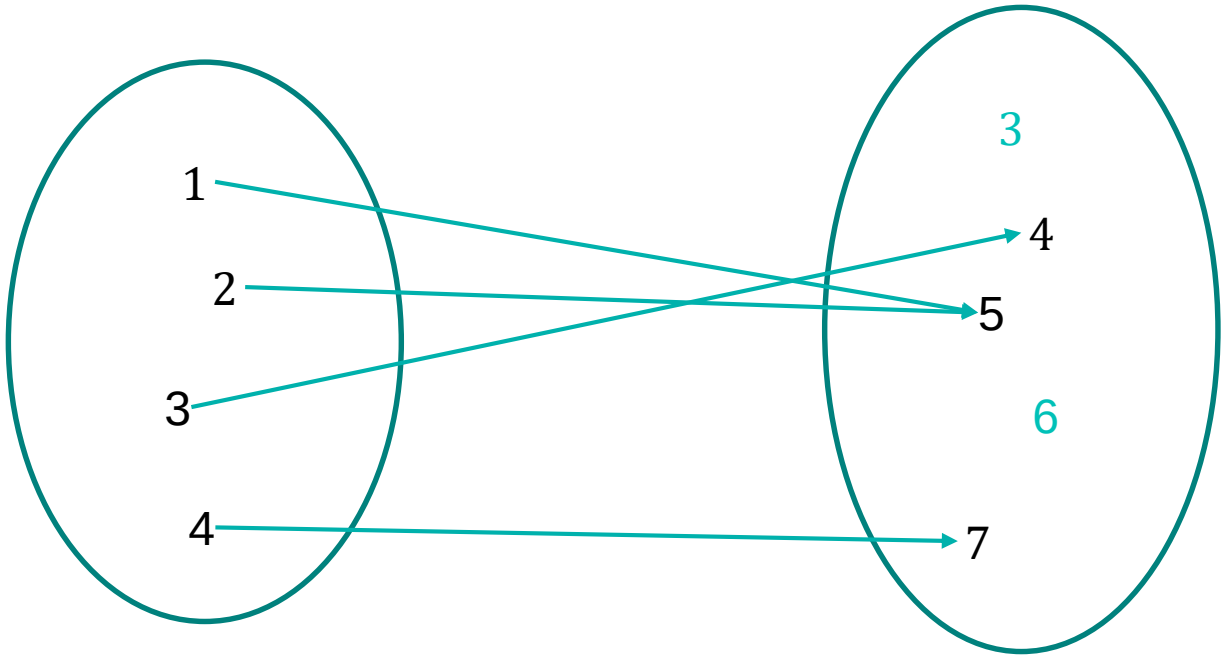
Mathematische Objekte: Funktionen

Begriffe und Bezeichnungen

Beispiele…

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$f(1) = 5\,,\ f(2) = 5\,,\ f(3) = 4 \quad \text{und} \quad f(4) = 7$$



Wertemenge:

$W = \{4,5,7\}$

Mathematische Objekte: Funktionen

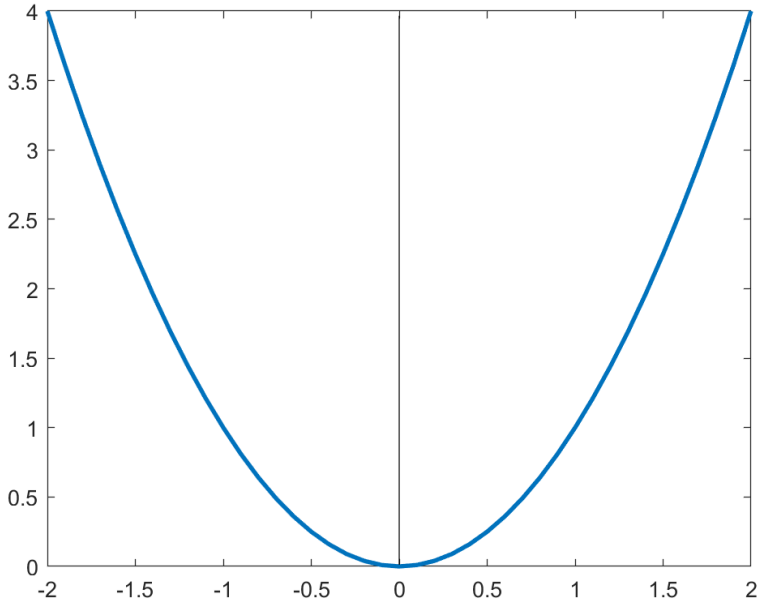
Begriffe und Bezeichnungen

Beispiele…

Wir betrachten die Normalparabel, die beschrieben wird durch: $f(x) = x^2$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Alle reellen Zahlen sind erlaubt…



Wertebereich:

Das Quadrat ist immer positiv…

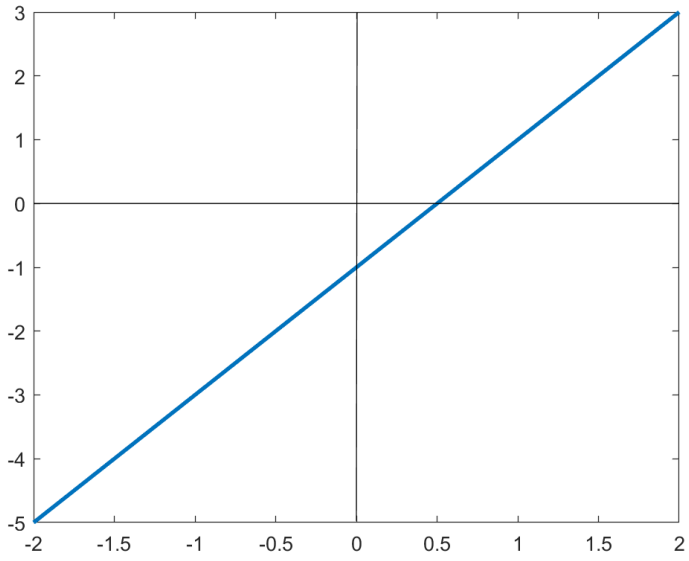
$$W = \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$$

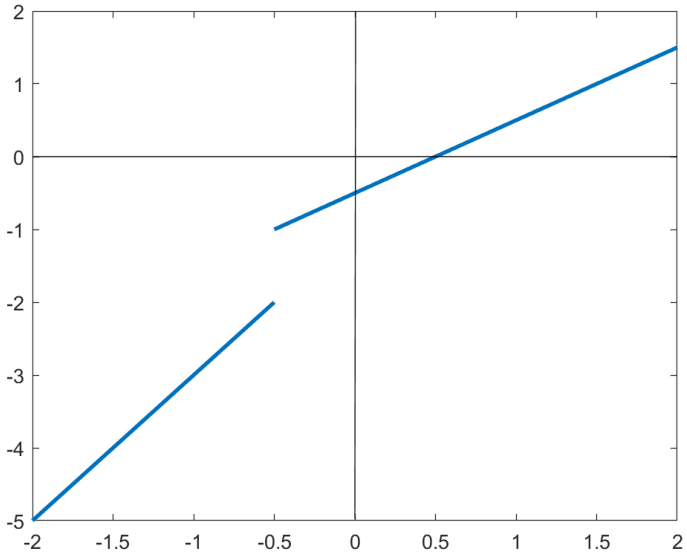
Mathematische Objekte: Funktionen

Begriffe und Bezeichnungen

Beispiele…

Wir betrachten zwei Geraden…





Definitionsbereich: In beiden Fällen sind alle reellen Zahlen erlaubt

Wertebereich: Fall 1: es können alle reelle Zahlen angenommen werden

Fall 2: alle reellen Zahlen außer das Intervall $[-2, -1]$

Mathematische Objekte: Funktionen

Begriffe und Bezeichnungen

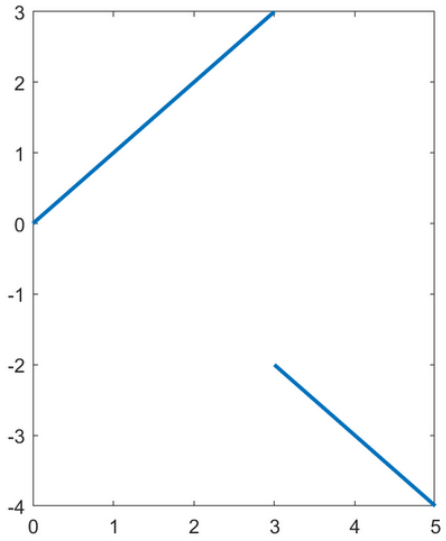
Jetzt sind Sie an der Reihe...

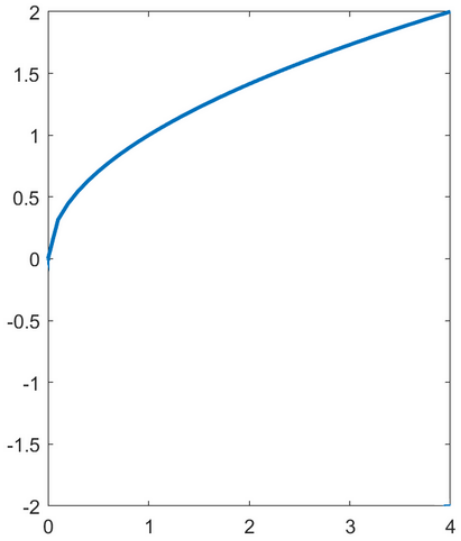
Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen jeweils den Definitions- und Wertebereich:

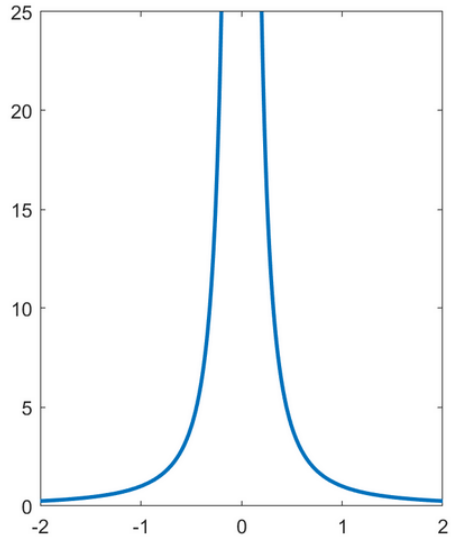
a) Wir ordnem jedem Fußballspieler der Bundesliga die Anzahl der geschossenen Tore zu.

b) Wir betrachten die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$

c) Wir betrachten die Funktionsgraphen:







Mathematische Objekte: Funktionen

Darstellungsformen

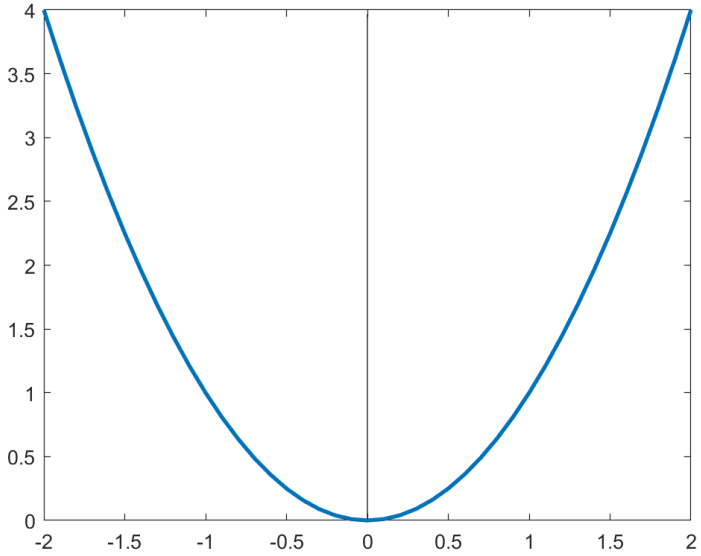
Typische Form in der Mathematik

Häuft begegnen uns Funktionen in der Mathematik in der analytischen Form, d.h. dargestellt durch Terme…

Beispiele:

$$f(x) = x^2 \qquad y = x^2 \qquad x \mapsto x^2$$

Zusätzlich visualisieren wir die Funktionen z.B. bei der Kurvendiskussion indem ein Funktions-Graph gezeichnet wird…



Oft wird zum Zeichnen des Funktionsgraphen eine Wertetabelle erstellt…

x	x^2
1	1
2	4
3	9
4	16

Mathematische Objekte: Funktionen

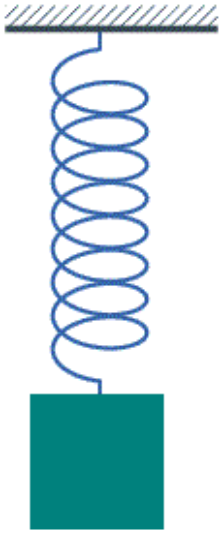
Darstellungsformen

Typische Form in den Natur- und Ingeneurwissenschaften

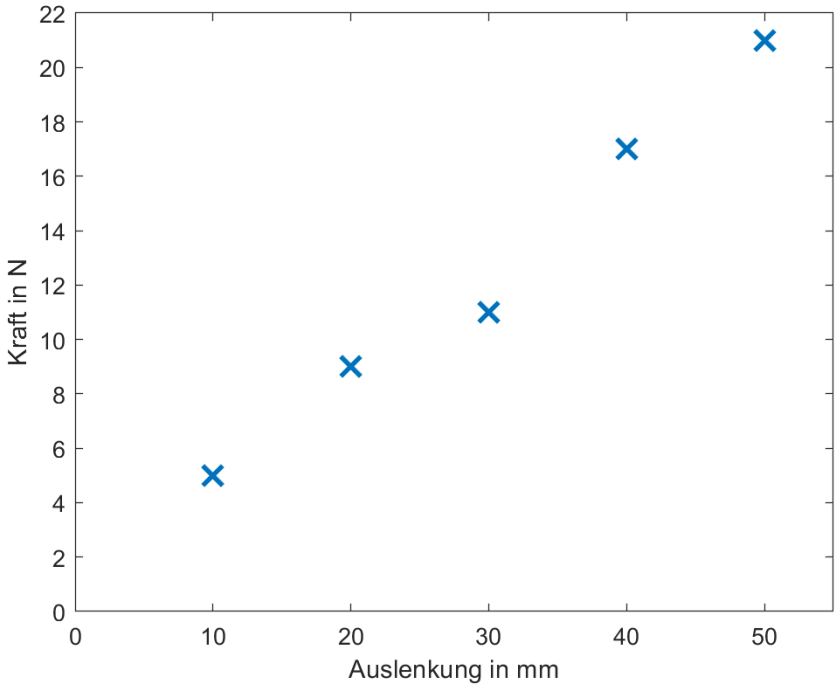
Hier liegen die Funktionen oft nicht direkt in der analytischen Form vor…

Beispiele:

Ausgangspunkt ist ein Experiment oder eine Beobachtung…



Auslenkung x	Kraft F
10 mm	5 N
20 mm	9 N
30 mm	11 N
40 mm	17 N
50 mm	21 N



Hooke‘sches Gesetz: $F = D \cdot x$

Mathematische Objekte: Funktionen

Darstellungsformen

Übersicht

Welche Darstellungsformen haben wir für Funktionen?

- Analytische Darstellung durch Terme
- Tabellarische Darstellung (Wertetabelle)
- Grafische Darstellung
- Pfeildiagramme
- Verbale Darstellung (Beschreibung)

Mathematische Objekte: Funktionen

Darstellungsformen

Tabellarische Darstellung

Egal ob gemessen oder ausgerechnet, wir können eine Funktion durch eine Wertetabelle darstellen, indem wir einige ausgewählte Wertepaare angeben.

x	x^2
1	1
2	4
3	9
4	16

x	x^2
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Horizontale Sicht:

→ Wertepaare ablesen

Vertikale Sicht:

→ Änderungsverhalten

Nachteil:

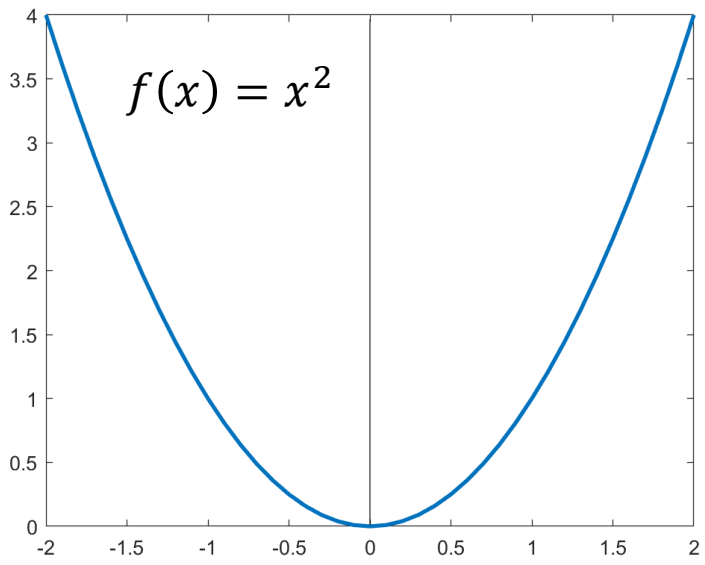
Angabe von nur wenigen Werten, daher nur ein Auszug möglich

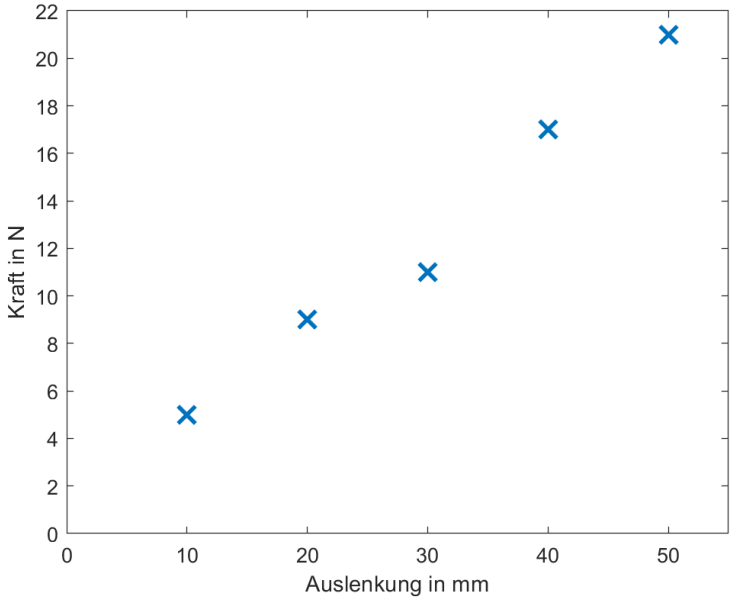
Mathematische Objekte: Funktionen

Darstellungsformen

Grafische Darstellung

Wir kennen bereits die Darstellung als Funktionsgraph, die wir z.B. über eine Wertetabelle erhalten…



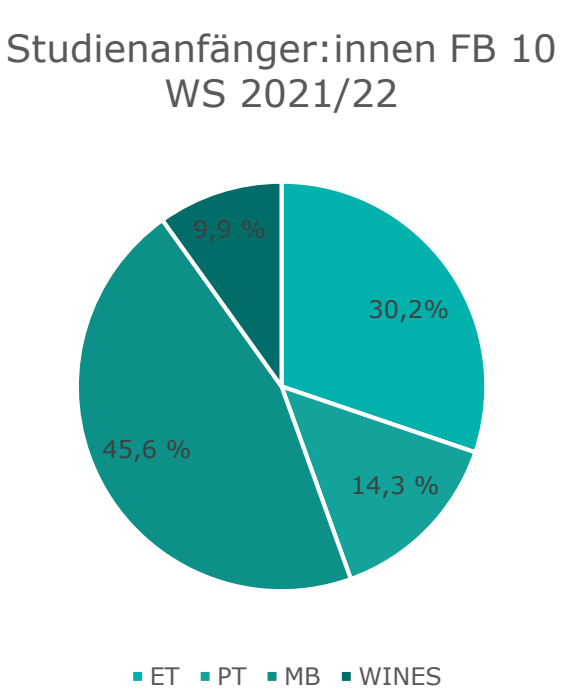


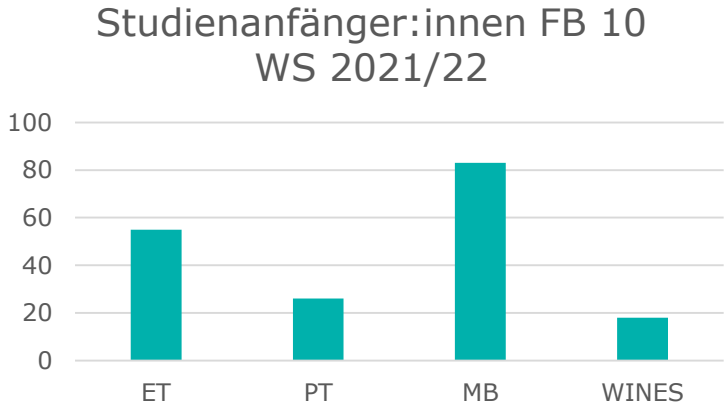
Mathematische Objekte: Funktionen

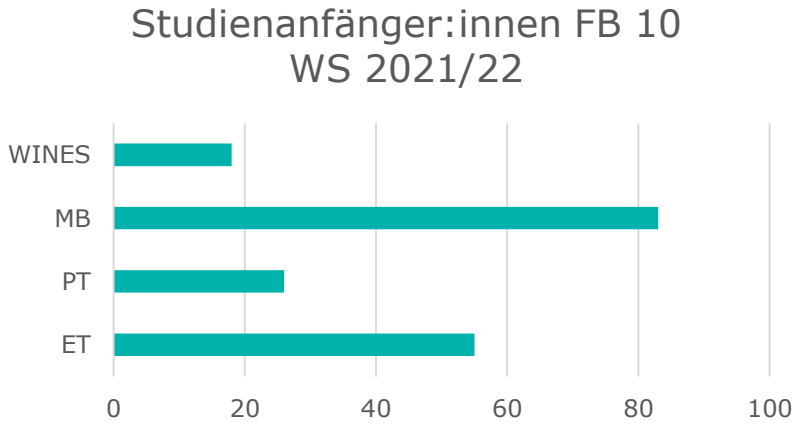
Darstellungsformen

Grafische Darstellung

Es gibt aber weitere Darstellungsmöglichkeiten…





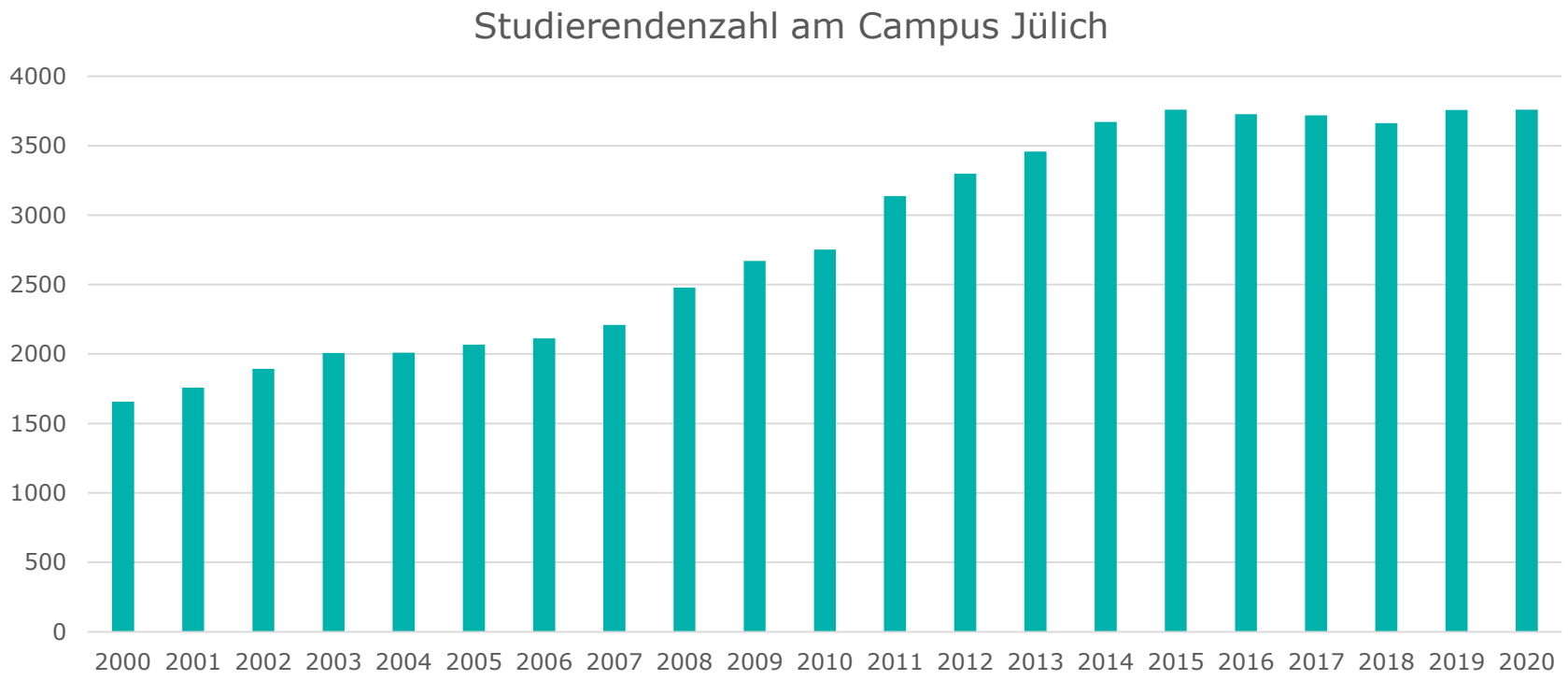


Mathematische Objekte: Funktionen

Darstellungsformen

Grafische Darstellung

Balkendiagramme können nicht nur statisch sein…



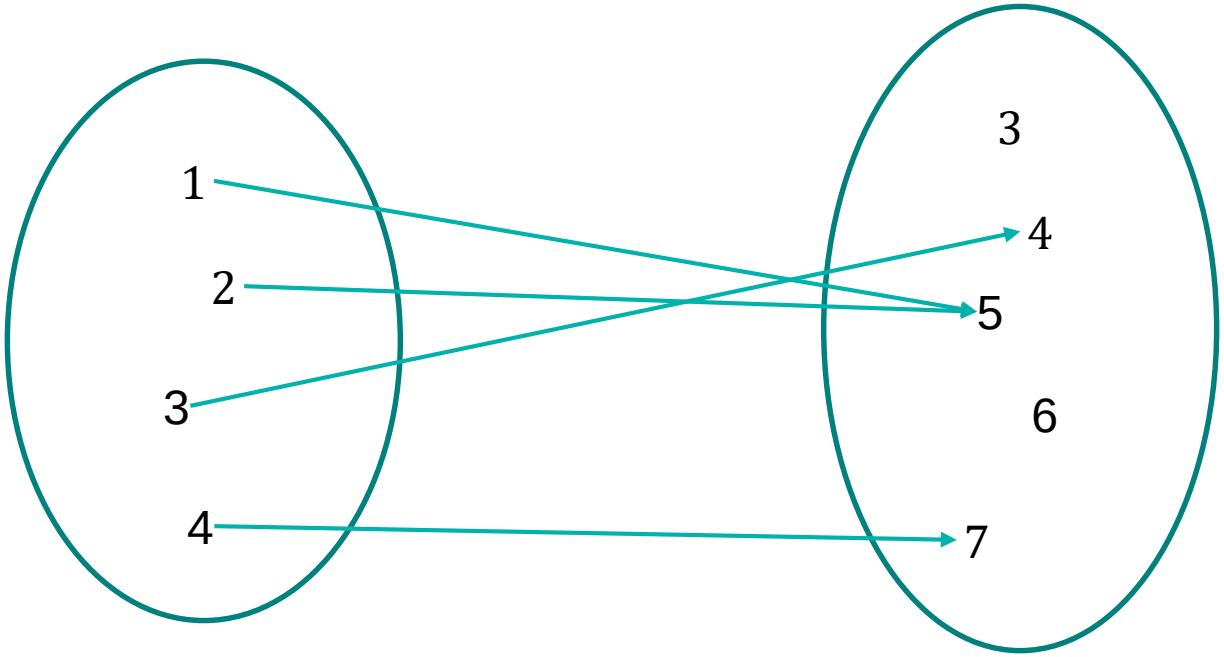
Quelle: Statistisches Bundesamt, https://www.destatis.de

Mathematische Objekte: Funktionen

Darstellungsformen

Pfeildiagramme

Wir können Zuordnungen mit Hilfe von Pfeilen darstellen…

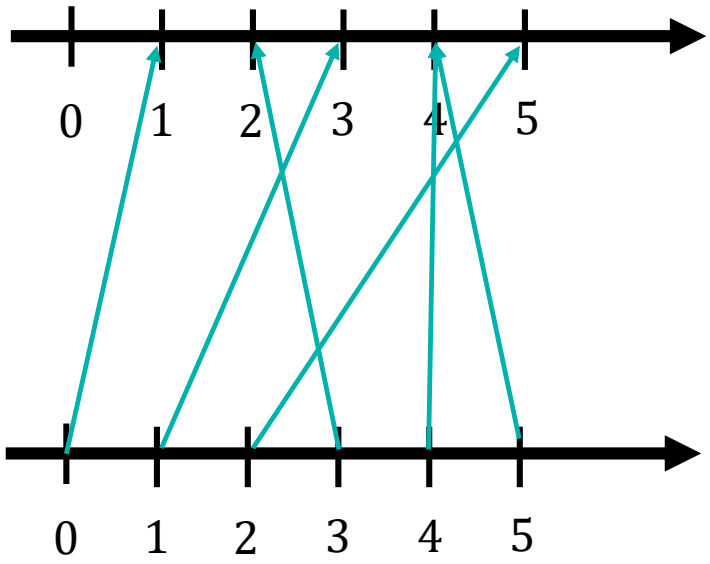


Mathematische Objekte: Funktionen

Darstellungsformen

Pfeildiagramme

Eine andere Form des Pfeildiagramms nutzt den Zahlenstrahl…



Mathematische Objekte: Funktionen

Darstellungsformen

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Die beiden Tabellen unten zeigen die Rekordspieler des FC Köln bzgl. Pflichtspiele und geschossenen Toren. Wie können Sie die Funktionen, welche den Spielern jeweils die Anzahl der Spiele und Tore zuordnen am besten darstellen?

Spieler	Nat.	Position	Spiele
Wolfgang Overath		Mittelfeld	542
Toni Schumacher		Tor	541
Hans Schäfer		Sturm	506
Hannes Löhr		Sturm	505
Pierre Littbarski		Mittelfeld	504
Heinz Simmet		Mittelfeld	477
Wolfgang Weber		Abwehr	470
Bernd Cullmann		Mittelfeld	458
Harald Konopka		Abwehr	456
Heinz Flohe		Mittelfeld	453

Spieler	Nat.	Position	Tore
Hans Schäfer		Sturm	306
Hannes Löhr		Sturm	235
Dieter Müller		Sturm	231
Christian Müller		Sturm	182
Karl-Heinz Thielen		Sturm	146
Pierre Littbarski		Mittelfeld	144
Klaus Allofs		Sturm	120
Heinz Flohe		Mittelfeld	118
Wolfgang Overath		Mittelfeld	118
Hans Sturm		Sturm	102

Quelle: Wikipedia (Stand Oktober 2021)

Mathematische Objekte: Funktionen

Darstellungsformen

Verbale Darstellung

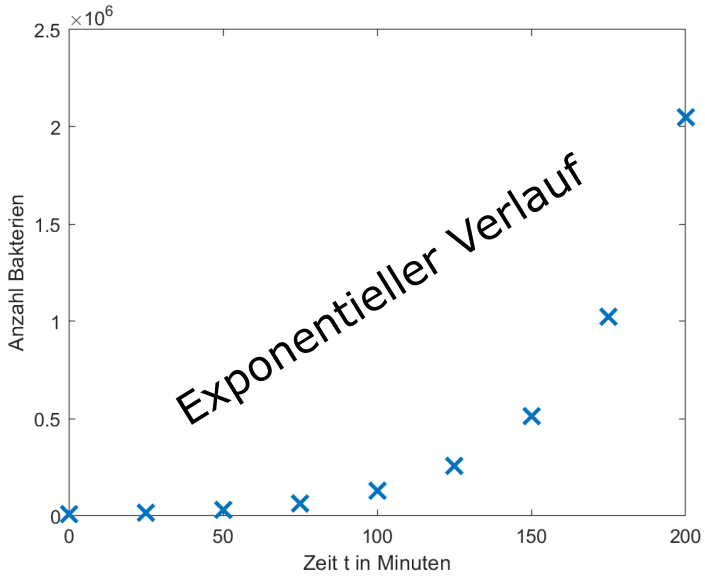
Wir können Funktionen bzw. deren Verlauf oder deren „Wirkung“ auch verbal, d.h. durch Worte oder eine Umschreibung angeben…

Beispiel: Wir betrachten Bakterien im Labor.

Zu Beginn der Beobachtung haben wir 8.000 Bakterien.

Die Bakterien verdoppeln sich alle 25 Minuten.

Zeit	Bakterien
0 Min.	8.000
25 Min.	16.000
50 Min.	32.000
75 Min.	64.000



Analytische Form:

$$N(t) = 8.000 \cdot 2^{t/25}$$

Mathematische Objekte: Funktionen

Darstellungsformen

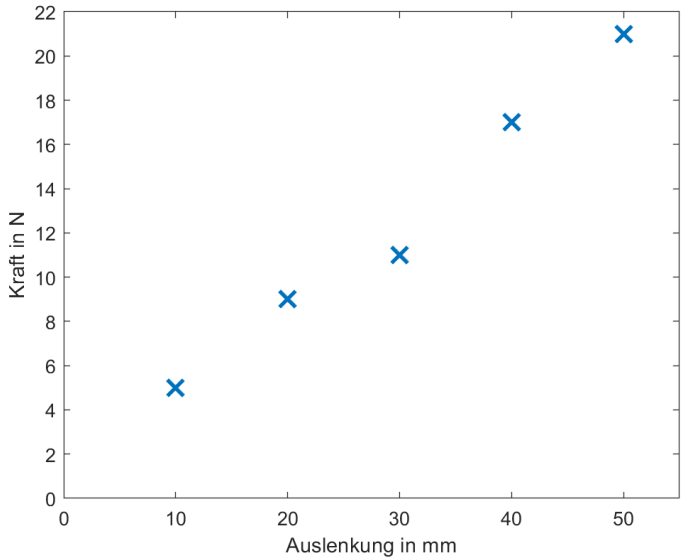
Verbale Darstellung

Wir nutzen die verbale Darstellung auch in anderen Situationen…

Beispiel:

Wir haben Messungen durchgeführt und Messreihen erhalten und diese geplottet. Anschließend beschreiben wir mündlich oder schriftlich wie sich die Funktionen verhalten, welche Eigenschaften sie besitzen etc.

Auslenkung x	Kraft F
10 mm	5 N
20 mm	9 N
30 mm	11 N
40 mm	17 N
50 mm	21 N



Mathematische Objekte: Funktionen

Darstellungsformen

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Im folgenden Text wird verbal eine Funktion beschrieben:

> In der TV-Serie "Hubert und Staller" behauptet Hubert, dass das perfekte Alter für die Partnerin eines Mannes sich berechnen lässt: Man teilt das Alter des Mannes durch zwei und addiert sieben Jahre.
>
> Stellen Sie die zugehörige Formel auf und anaylsieren Sie diese? Ist es nach der Formel möglich ein lebenlang zusammen zu bleiben?